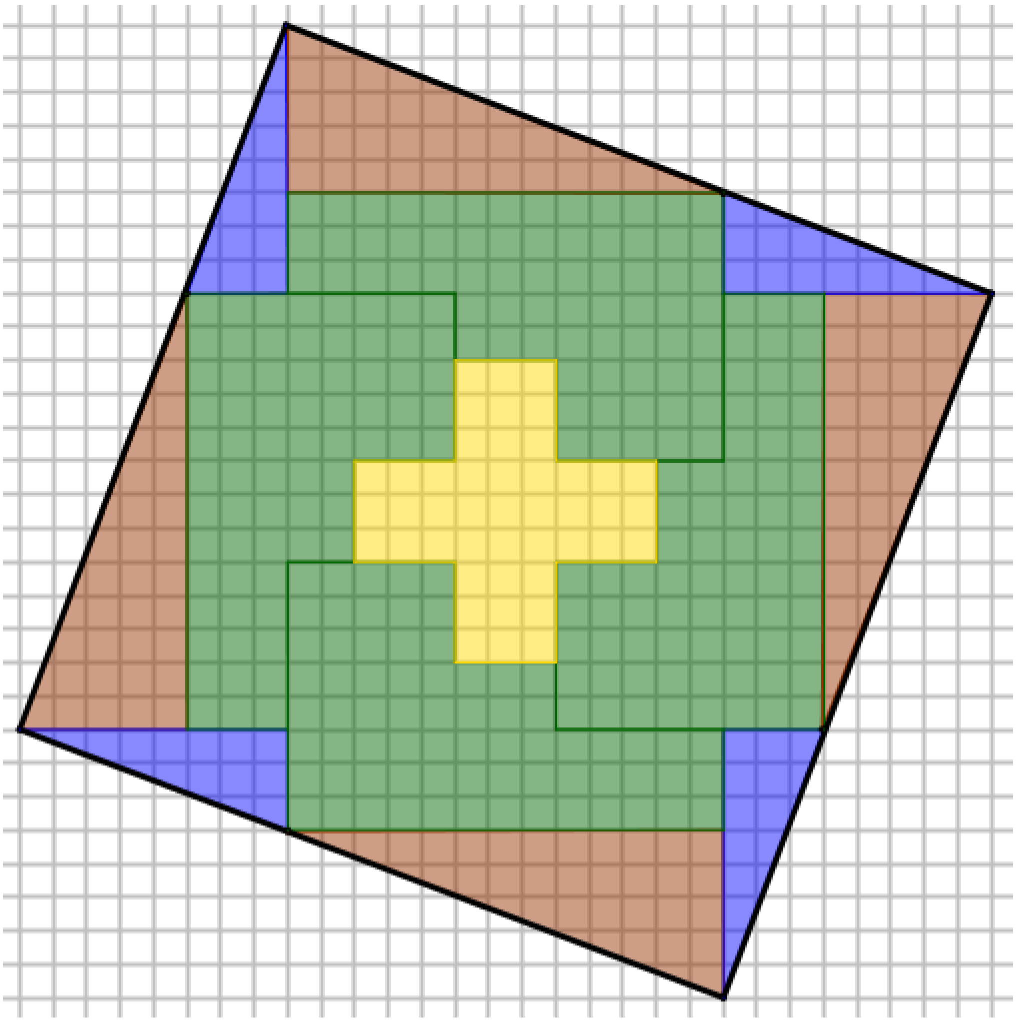
MATHéMAGIE #139 – Le même air, mais...

Introduction : Extrait de l'excellente revue, le petit Archimède n°93-94 de septembre 1983, ce puzzle géométrique paradoxal est un grand classique du genre à l'instar des puzzles de Lewis Caroll. Toujours étonnant pour l'auditoire qui se posera nécessairement des questions à l'issue ! Pourquoi ça marche ?
Sources :
http://villemin.gerard.free.fr/Puzzle/LewisCar.htm
http://www.lepetitarchimede.fr/pa/pa.htm

Matériel : les 14 pièces du puzzle en annexe

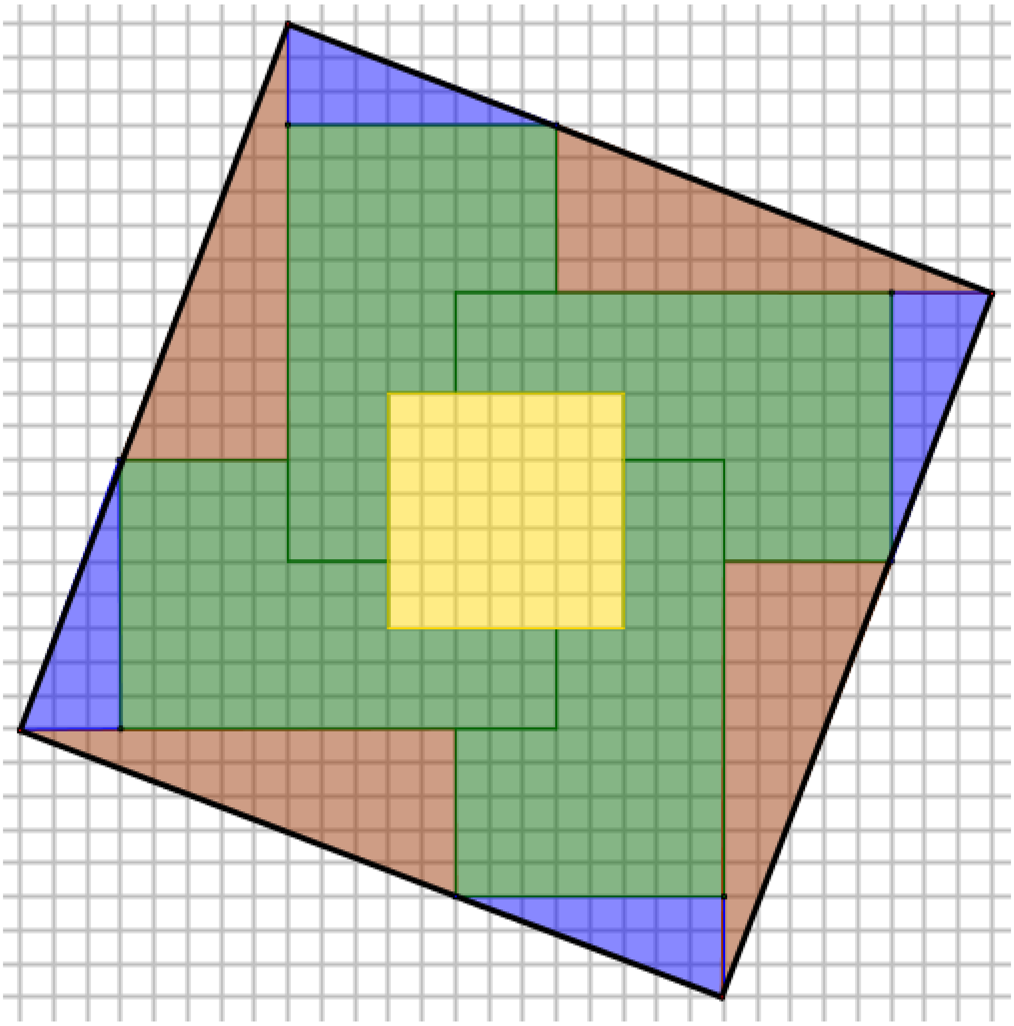
Déroulement du tour : Le mathémagicien montre aux spectateurs les 14 pièces du puzzle et un cadre carré. Il agence 13 pièces de la façon suivante dans le cadre :

Le puzzle de la croix :



Il déconstruit le puzzle de la croix et propose un nouveau puzzle avec 13 pièces.

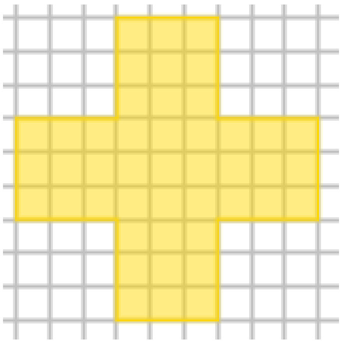
Le puzzle du carré :



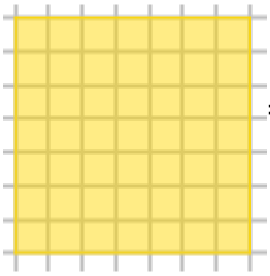
et cela dans le même cadre, tout en faisant constater que les deux pièces centrales, le carré et la croix n'ont pas la même aire ! Comment est-ce possible ?

Explication : Tout repose sur les dimensions des triangles rectangles et une certaine suite célèbre dite de Fibonacci !

On constate avec évidence que les aires centrales sont bien différentes :



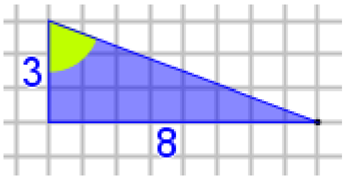
= 45 u.a.

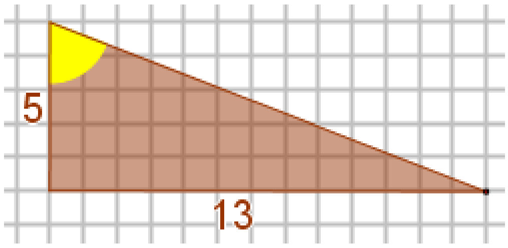


= 49 u.a.

u.a. = unité d'aire = 1 carreau
Où sont donc passées ces 4 u.a. ?

Etudions les deux triangles rectangles :



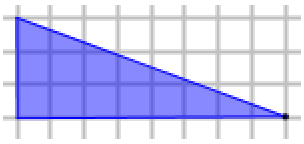


Comparons les pentes en vert et en jaune de ces triangles en calculant leur tangente :

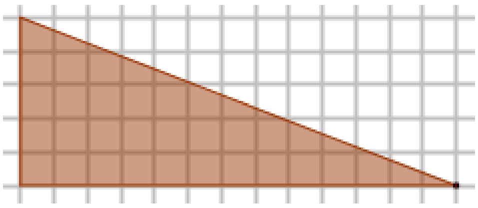
$$\tan(\mathit{angle\ vert})=\frac{8}{3}\approx 2{,}66 \quad \text{et} \quad \tan(\mathit{angle\ jaune})=\frac{13}{5}=2{,}6$$

Les deux pentes sont très proches mais différentes et quasi indécelables à l'oeil nu ! Pour un des puzzles, les bords sont gonflés et pour l'autre, ils sont creusés. Ce qui donne une 1ère explication !

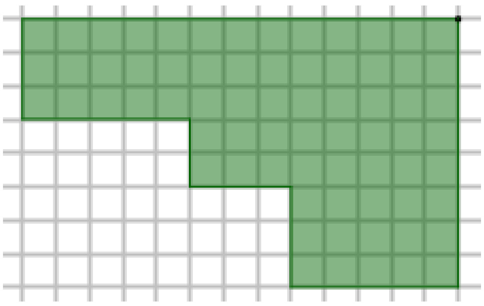
Calculons précisément les aires de chaque pièce :



$$=\frac{3\times 8}{2}=12\,u.a.$$



$$=\frac{13\times 5}{2}=32{,}5\,u.a.$$

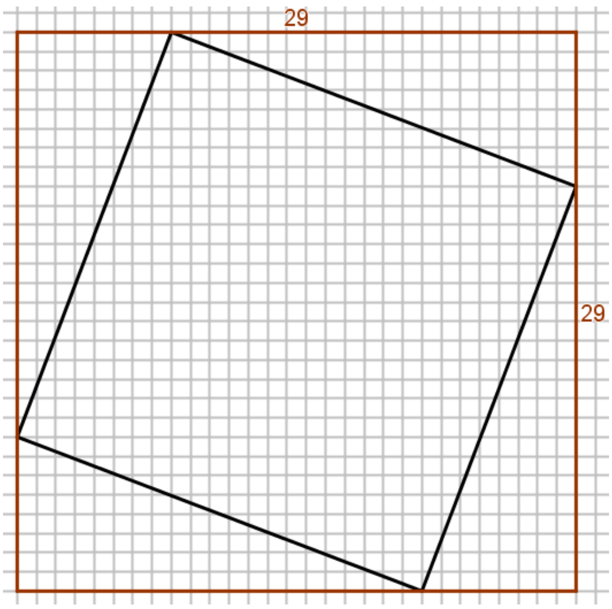


$$= 13\times 3+8\times 2+5\times 3=39+16+15=70\,u.a.$$

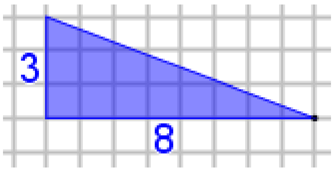
Les 12 pièces communes aux deux puzzles ont une aire de :
$12\times 4+32{,}5\times 4+70\times 4=48+130+280=458\,u.a.$

Le grand cadre a une aire égale à :
$$29^2-4\times\frac{21\times 8}{2}=841-336=505\,u.a.$$

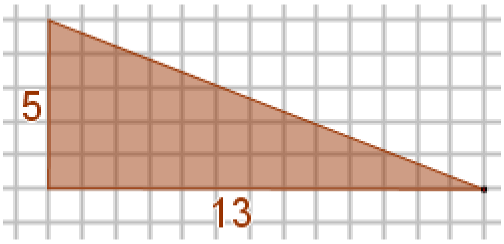
or : $505-458=47\,u.a.$
donc la forme optimale centrale devrait avoir une aire de 47 u.a., pas 45, ni 49. Il y a donc 2 u.a. en plus ou en moins par rapport à ce qui est attendu !



Autre point de vue avec le théorème de Pythagore en calculant les hypoténuses des deux triangles rectangles :



$= \sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}\approx 8{,}54$



$= \sqrt{5^2+13^2}=\sqrt{194}\approx 13{,}93$

Le côté du grand cadre carré est $\sqrt{505}\approx 22{,}4722$ et $\sqrt{73}+\sqrt{194}\approx 22{,}4724$ arrondis au dix-millième soit une différence infime non visible également !

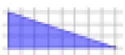
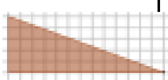
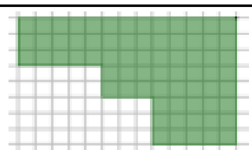
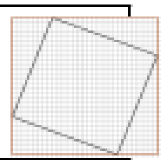
Compléments :
On remarque que les côtés des deux triangles rectangles sont des termes de la célèbre suite de Fibonacci : 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 ... que nous noterons F_n.
Plus précisément, les deux côtés de l'angle droit sont deux termes du type F_n et F_{n-2}.

Lemme 1 : la pente des triangles du type F_n, F_{n-2} converge vers $\varphi^2=\varphi+1$

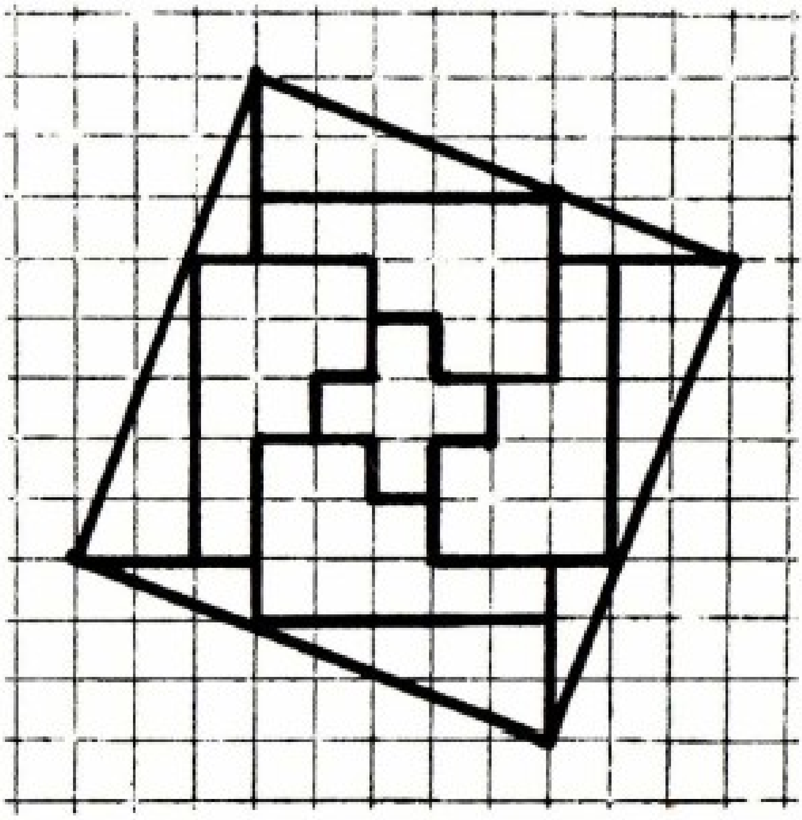
Preuve : On sait que les quotients de deux termes consécutifs de la suite converge vers φ donc $\frac{F_n}{F_{n-2}}=\frac{F_n}{F_{n-1}}\times\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}$ converge vers $\varphi\times\varphi=\varphi^2$.

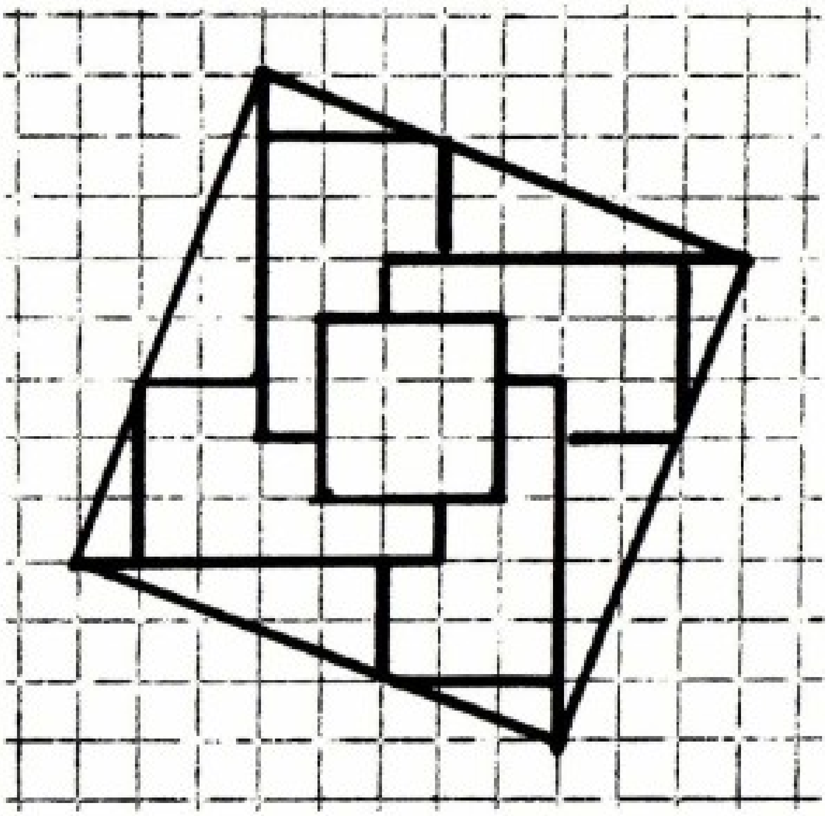
La limite des pentes avoisine donc 2,618 28…

Voici toutes les dimensions des pièces en fonction de la suite F_n :

													
n	**F_n**	**F_{n+2}**	**F_{n+1}**	**F_{n+3}**	**F_n**	**F_{n+1}**	**F_{n-1}**	**F_n**	**F_n**	**F_{n+1}**	**F_{n+2}**	**F_{n+3}**	**$F_{n+4}+F_{n+2}$**
1	1	3	2	5	1	2	1	1	1	2	3	5	11
2	2	5	3	8	2	3	1	2	2	3	5	8	18
3	3	8	5	13	3	5	2	3	3	5	8	13	29
4	5	13	8	21	5	8	3	5	5	8	13	21	47
5	8	21	13	34	8	13	5	8	8	13	21	34	76
6	13	34	21	55	13	21	8	13	13	21	34	55	123
7	21	55	34	89	21	34	13	21	21	34	55	89	199
8	34	89	55	144	34	55	21	34	34	55	89	144	322
9	55	144	89	233	55	89	34	55	55	89	144	233	521
10	89	233	144	377	89	144	55	89	89	144	233	377	843

Voici également un autre puzzle dans le cas n=1 extrait du Petit Archimède :





ANNEXE – Les 14 pièces du puzzle et le cadre carré